Lösningar till diagnosprov 1 i Matte 3

Kap 1 Algebra + funktioner

1) a) $\underline{\underline{(x-3)\cdot(x-6)}}$

b) $(x-3)\cdot(x-6) = x^2 - 6x - 3x + 18 =$

$= \underline{\underline{x^2 - 9x + 18}}$

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Vieta: $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 \cdot x_2 &= 12 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$

$x^2 - 7x + 12 = \underline{\underline{(x-3)\cdot(x-4)}}$

<u>Kontroll</u>: $(x-3)\cdot(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 =$

$= x^2 - 7x + 12$ o.k.

3) a) $4x^3 - 2x^2(2x+6) + 7x(3+2x) =$

$= 4x^3 - 4x^3 - 12x^2 + 21x + 14x^2 = \underline{\underline{2x^2 + 21x}} = P(x)$

P:s grad är 2 och dess koefficienter är 2 och 21.

b) $P(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 21\cdot(-1) = 2\cdot 1 - 21 = 2 - 21 = \underline{\underline{-19}}$

c) $2x^2 + 21x = 0$

$x(2x + 21) = 0$: Nollprodukt-metoden

$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$2x_2 + 21 = 0$

$2x_2 = -21$

$\underline{\underline{x_2 = -10{,}5}}$

---

d) $P(x) = x\cdot(2x+21)$ eller $P(x) = 2x\cdot(x + 10{,}5)$

<u>Kontroll</u>: $x\cdot(2x+21) = 2x^2 + 21x$ o.k.

eller $2x(x+10{,}5) = 2x^2 + 21x$ o.k.

4) $$\frac{5x}{16} + \frac{x}{2} - \frac{3x}{4} = \frac{5x}{16} + \frac{8\cdot x}{8\cdot 2} - \frac{4\cdot 3x}{4\cdot 4} =$$

$$= \frac{5x + 8x - 12x}{16} = \frac{13x - 12x}{16} = \underline{\underline{\frac{x}{16}}}$$

5) $$\frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 16} = \frac{2x\cdot(x-4)}{(x+4)\cdot(x-4)} = \underline{\underline{\frac{2x}{x+4}}}$$

---

6) $$e^{\ln x} = -2x + 3$$

Inversegenskapen:

$e^{\ln x}$

Tar ut varandra

$$x = -2x + 3 \qquad | +2x$$

$$3x = 3 \qquad | \,/3$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

7) $$e^x = 17 \qquad | \ln(\cdot)$$

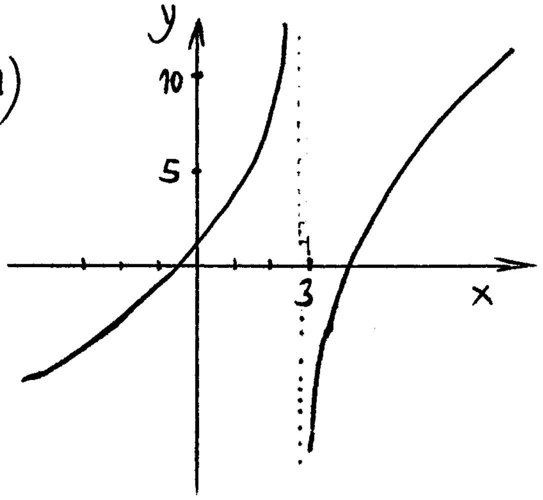
Inversegenskapen:

$$\ln(e^x) = \ln 17$$

$$x = \ln 17$$

$$\underline{\underline{x = 2{,}833}}$$

8) a)



b) $f(x)$ är kontinuerlig för alla $x \neq 3$.

c) $f(x)$ har i $x = 3$ en diskontinuitet av typ oändlighetsställe, eftersom $f(x)$ inte är definierad för $x = 3$.

9. Lös ekvationen algebraiskt: $|x+1| + 2x = 3$

Fall 1: $x+1 \geq 0$ eller $x \geq -1$

Enligt absolutbeloppets definition blir i så fall $|x+1| = x+1$ och ekvationen blir:

$$\begin{aligned} x+1+2x &= 3 \\ 3x+1 &= 3 \\ 3x &= 3-1 \\ 3x &= 2 \\ x_1 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vi kollar om lösningen inte står i motsats till förutsättningen vi gjorde i detta fall, nämligen $x \geq -1$.

Det stämmer att $\frac{2}{3} \geq -1$. Därmed kan vi godta lösningen $x_1 = \frac{2}{3}$.

Fall 2: $x+1 < 0$ eller $x < -1$

Enligt absolutbeloppets definition blir i så fall $|x+1| = -(x+1) = -x-1$ och ekvationen blir:

$$\begin{aligned} -x-1+2x &= 3 \\ x-1 &= 3 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Vi kollar om lösningen inte står i motsats till förutsättningen vi gjorde i detta fall, nämligen $x < -1$.

Faktiskt är $4 \not< -1$ utan det gäller $4 > -1$. Därmed måste vi förkasta lösningen $x_2 = 4$ som är en falsk rot.

Ekvationen har endast lösningen:

$$x = \frac{2}{3}$$

****

10. Lös följande ekvation exakt: $\ln x = 1 + \ln(x-1)$

$$\begin{aligned}
\ln x &= 1 + \ln(x-1) && \mid\ -\ln(x-1) \\
\ln x - \ln(x-1) &= 1 && :\ \text{Logaritmlag 2 i VL} \\
\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) &= 1 && \mid\ e^{\cdot} \\
\frac{x}{x-1} &= e && \mid\ \cdot(x-1) \\
x &= e\cdot(x-1) && \\
x &= e\cdot x - e && \mid\ +e-x \\
e &= e\cdot x - x && :\ \text{Bryt ut } x \text{ i HL} \\
e &= x\cdot(e-1) && \mid\ /\ (e-1) \\
x &= \frac{e}{e-1} &&
\end{aligned}$$

****

11) $\frac{x-1}{1-x}+\frac{1+y}{y+1}=\frac{x-1}{-(x-1)}+\frac{y+1}{y+1}=$

$$=-1+1=\underline{\underline{0}}$$

12) $\frac{pz+1}{pz+(pz)^2}=\frac{pz+1}{pz\cdot(1+pz)}=$

$$=\frac{1+pz}{pz\cdot(1+pz)}=\underline{\underline{\frac{1}{pz}}}$$

13) $\frac{1}{2}-\frac{a}{x+1}-1=5+\frac{1}{3}-\frac{b}{x+1}$

$$-\frac{1}{2}-\frac{a}{x+1}=\frac{16}{3}-\frac{b}{x+1} \qquad \Big| +\frac{1}{2}+\frac{b}{x+1}$$

$$\frac{b}{x+1}-\frac{a}{x+1}=\frac{16}{3}+\frac{1}{2}$$

$$\underline{\qquad}\ //\ \underline{\qquad}=\frac{2\cdot 16}{2\cdot 3}+\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{32+3}{6}=\frac{35}{6}$$

$$\frac{b}{x+1}-\frac{a}{x+1}=\frac{35}{6}$$

$$\frac{b-a}{x+1}=\frac{35}{6} \qquad \Big| \cdot 6\cdot(x+1)$$

$$6\cdot(b-a)=35\cdot(x+1) \qquad \Big| /35$$

$$\frac{6\cdot(b-a)}{35}=x+1 \qquad \Big| -1$$

$$\underline{\underline{\frac{6\cdot(b-a)}{35}-1=x}}$$

14) a) FF = Förändringsfaktorn för 1 år

$$(FF)^5 \cdot 100\,000 = 190\,000$$

$$(FF)^5 = \frac{190\,000}{100\,000} = 1{,}9 \qquad \Big|\ \sqrt[5]{\cdot} \text{ eller } (\cdot)^{1/5}$$

$$FF = \sqrt[5]{1{,}9} = (1{,}9)^{1/5}$$

$$FF = 1{,}1370$$

$$\Downarrow \qquad (\text{Procent} = FF - 1)$$

$$\text{Räntesats} = \underline{\underline{13{,}7\ \%}}$$

b) Potensekvation som löses genom rotdragning.

c) $(1{,}137)^x \cdot 100\,000 = 300\,000$, x = Antalet år

$$(1{,}137)^x = 3 \qquad \Big|\ \ln(\cdot) \text{ eller } \lg(\cdot)$$

$$\ln(1{,}137)^x = \ln 3 \qquad : \text{3e log-lagen på VL}$$

$$x \cdot \ln(1{,}137) = \ln 3 \qquad \Big|\ /\ln(1{,}137)$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln(1{,}137)} = 8{,}557 \text{ år} =$$

$$= 8 \text{ år} + \underbrace{0{,}557 \cdot 12}_{6{,}68 \approx 7 \text{ månader.}} \text{ månader.}$$

Efter <u>8 år och 7 månader</u> har kapitalet tredubblats.

d) Exponentialekvation som löses genom logaritmering.

15) a) $$y = 10 \cdot e^{0,5x}$$

"I början" innebär: $x = 0 \Rightarrow y = 10 \cdot e^{0,5 \cdot 0} = 10 \cdot e^{0} =$

$= 10 \cdot 1 = 10$

I början fanns det 10 bakterier i mjölken.

b) Efter 8 timmar:

$x = 8 \Rightarrow y = 10 \cdot e^{0,5 \cdot 8} = 10 \cdot e^{4} =$

$= 546$

Efter 8 timmar kommer det att finnas 546 bakterier i mjölken.

c) $x =$ Antalet timmar

$$10 \cdot e^{0,5x} = 1250$$

$$e^{0,5x} = 125 \qquad | \ln(\cdot)$$

$$\ln(e^{0,5x}) = \ln 125$$

Invers-egenskapen: Tar ut varandra

$$0,5 \cdot x = \ln 125 \qquad | \cdot 2$$

$$x = 2 \cdot \ln 125 = 9,657 \text{ h} =$$ (timmar)

$$= 9 \text{ h} + \underbrace{0,657 \cdot 60 \text{ min}}_{\approx 39 \text{ min}}$$

Efter 9 timmar och 39 minuter blir mjölken sur.